03 Закони розподілу ймовірностей часу безвідмовної роботи

Час безвідмовної роботи - випадкова величина. Найбільш повною її характеристикою є закон розподілу. В теорії надійності використовуються ряд законів: Вейбулла-Гнеденко, експоненціальний, Релея, Пуассона, нормальний, рівномірний та ін.

3.1 ***Розподіл Вейбулла-Гнеденко*** використовується звичайно при описі показників надійності напівпровідникових приладів, мікросхем і РЕП. Для цього розподілу ймовірність безвідмовної роботи в інтервалі $0-t$

$$P(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{c}\right)^{b}\right], \tag{3.1}$$

де $b \geq 0$ (t_1, t_2) – параметр форми закону розподілу, який залежить від кількості відмов виробу;

$c \geq 0$ – параметр масштабу.

Щільність ймовірності відмов (рис.3.1, а) дорівнює

$$f(t) = \frac{b}{c} \cdot \left(\frac{t}{c}\right)^{b-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{c}\right)^{b}\right], \tag{3.2}$$

середнє напрацювання до відмови

$$T_{сер} = M_t = c \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right); \tag{3.3}$$

де $\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right) = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{b}} \cdot \exp(-x)dx$ - табульована повна гамма-функція.

Дисперсія середнього напрацювання до відмови при цьому складає

$$\sigma_t^2 = \frac{c^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)^2\right]}{\lambda_0^{\frac{2}{b}}}. \tag{3.4}$$

Із формул (3.1) і (3.2)

$$\lambda(t) = \frac{b}{c} \cdot \left(\frac{t}{c}\right)^{b-1}. \tag{3.5}$$

Неважко визначити, що при $b > 1$ інтенсивність відмов монотонно зменшується, а при $b > 1$монотонно збільшується (рис.3.1, б).

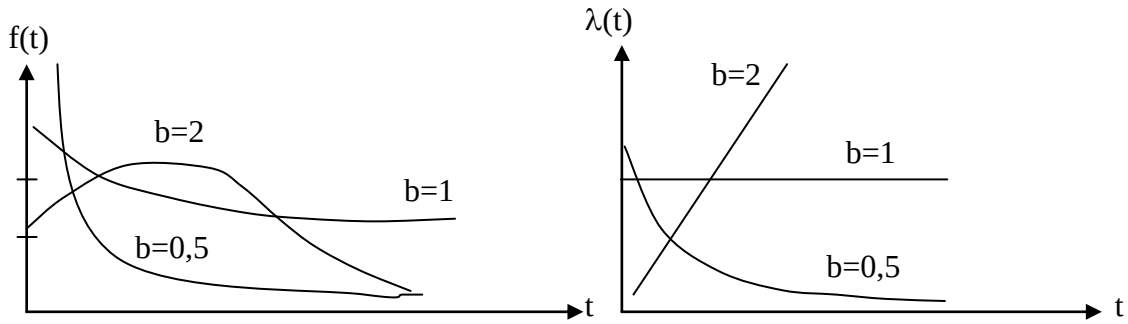
Розподіл Вейбулла при $b = 1$ одержав назву *експоненціального розподілу*. Його специфічною особливістю є постійність інтенсивності відмов λ (t) = const.

Отже, ймовірність безвідмовної роботи

$$P(t) = \exp(-\lambda \cdot t) \quad . \tag{3.6}$$

Щільність ймовірності відмов

$$f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t) . \tag{3.7}$$



а) б)

Рис. 3.1 – Щільність ймовірності напрацювання до відмови (а) та інтенсивність відмов (б) для розподілу Вейбулла-Гнеденко

Середнє напрацювання до відмови

$$T_{\text{ñåð}} = 1/\lambda \quad . \tag{3.8}$$

Підстановка (3.8) в (3.6) дає

$$P(T_{\text{ñåð}}) = \exp(-1) = 0,386 . \tag{3.9}$$

За експоненціальним розподілом математичне сподівання випадкової величини дорівнює середньому квадратичному відхиленню

$$M(t) = T_{\text{ñåð}} = \sigma_t = 1/\lambda . \tag{3.10}$$

Експоненціальний розподіл є типовим для більшості складних РЕП, що складаються з великої кількості різноманітних елементів, що не ремонтуються, які мають переважно

раптові відмови. З урахуванням (3.1) і (3.6) $\gamma-\%$ напрацювання до відмови за експоненціальним розподілом

$$P(t_\gamma) = \frac{\gamma}{100} = \exp(-\lambda \cdot t_\gamma), \tag{3.11}$$

отже

$$t_\gamma = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\gamma}{100}\right). \tag{3.12}$$

З урахуванням (3.8)

$$t_\gamma = T_{сер} \cdot \ln\left(\frac{\gamma}{100}\right). \tag{3.13}$$

Графіки щільності ймовірності відмов $f(t)$ і інтенсивності відмов $\lambda(t)$ для експоненціального закону відповідають графікам для закону Вейбулла-Гнеденко при $b=1$ (рис. 3.1).

3.2 ***Розподіл Релея*** достатньо повно описує поведінку РЕП і їх елементів з явно вираженим ефектом старіння і зношеності.

Ймовірність безвідмовної роботи

$$P(t) = \exp\left[-t^2 / c^2\right]. \tag{3.14}$$

Щільність ймовірності відмов (рис.1.2, а)

$$f(t) = \left(\frac{t}{c^2}\right)\exp\left[-\frac{t^2}{2c^2}\right]. \tag{3.15}$$

Інтенсивність відмов (рис.3.2, б)

$$\lambda(t) = \frac{t}{c^2}. \tag{3.16}$$

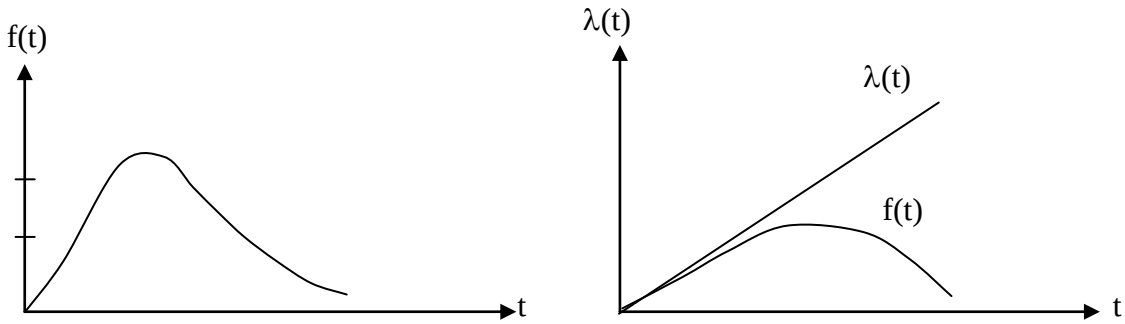
Середнє напрацювання до відмови

$$T_{сер} = c \cdot \sqrt{\frac{\tau}{2}} \approx 1{,}253 \cdot c. \tag{3.17}$$

Середнє квадратичне відхилення середнього напрацювання до відмови

$$\sigma_t = 0,655 \cdot c\,. \qquad (3.18)$$

Тут c – параметр розподілу.



а) б)

Рис. 3.2 - Щільність ймовірності напрацювання на відмову (а) та інтенсивність відмов (б) для розподілу Релея

3.3 ***Нормальний розподіл*** описує надійність об'єкта, для якого характерне зношування однорідних елементів, які мають малий розкид параметрів зношуваності.

Щільність ймовірності відмов

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(t - T_{сер}\right)^2}{2\sigma_t^2} \right]. \qquad (3.19)$$

При нормальному розподілі випадкова величина може мати будь-які значення від $-\infty$ до ∞. Оскільки можливі значення випадкового напрацювання до відмови можуть бути тільки позитивними, його розподіл слід приймати зрізано нормальним, або звичайним нормальним при $T_{ñåð} >> \sigma_t$. Вже при $T_{ñåð} / \sigma_t > 2,5$ від'ємна гілка закону вносить зневажливо малу вагу в загальний результат.

Для зрізаного нормального на інтервалі (t_1, t_2) розподілу вводять нормуючий множник, який визначається за умови, що площа під кривою щільності ймовірності розподілу відмов дорівнює 1:

$$C_0 = \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt}\,. \qquad (3.20)$$

При цьому, якщо $0 < t < \infty$, то функція розподілу відмов розраховується за допомогою функції Лапласа (інтеграла ймовірності)

$$L(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_0} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \,. \tag{3.21}$$

Тоді

$$C_0 = \frac{1}{0{,}5 + L\left(\frac{M_t}{\sigma_t}\right)}, \tag{3.22}$$

де M_t – математичне сподівання незрізаного розподілу.

Для зрізаного розподілу ймовірність безвідмовної роботи

$$P_{зр}(t) = C_0 \left\{0{,}5 - L\left[\left(t - M_t\right)/\sigma_t\right]\right\} . \tag{3.23}$$

Далі всі параметри, які характеризують зрізаний розподіл, будуть мати індекс “зр”.

Значення функції Лапласа табульовано тільки для додатних аргументів. У випадку від’ємних значень аргументів застосовують правило: $L_c(-x) = -L(x)$.

Диференціальна функція зрізаного розподілу (рис. 1.4, а)

$$f_{çð}(t) = C_0 \cdot f(t) \,. \tag{3.24}$$

Середнє напрацювання на відмову

$$T_{ñðð.çð} = M_t + \sigma_t \cdot \lambda \,, \tag{3.25}$$

$$\lambda = \left(\tilde{N}_0 \big/ \sqrt{2\pi}\right) \cdot \exp\left[-M_t^2 \big/ \left(2\sigma_t^2\right)\right]. \tag{3.26}$$

Середнє квадратичне відхилення нормального зрізаного розподілу

$$\sigma_{зр} = \sigma_t \sqrt{1 - \lambda^2 M_t / \sigma_t} \,. \tag{3.27}$$

Інтенсивність відмов нормального зрізаного розподілу (рис. 3.3, б)

$$\lambda_{çð}(t) = \frac{\exp\left[-\left(t - M_t\right)^2 \big/ \left(2\sigma_t^2\right)\right]}{\sqrt{2\pi\left[0{,}5 - L\left(\frac{t - M_t}{\sigma_t}\right)\right]}} \,. \tag{3.28}$$

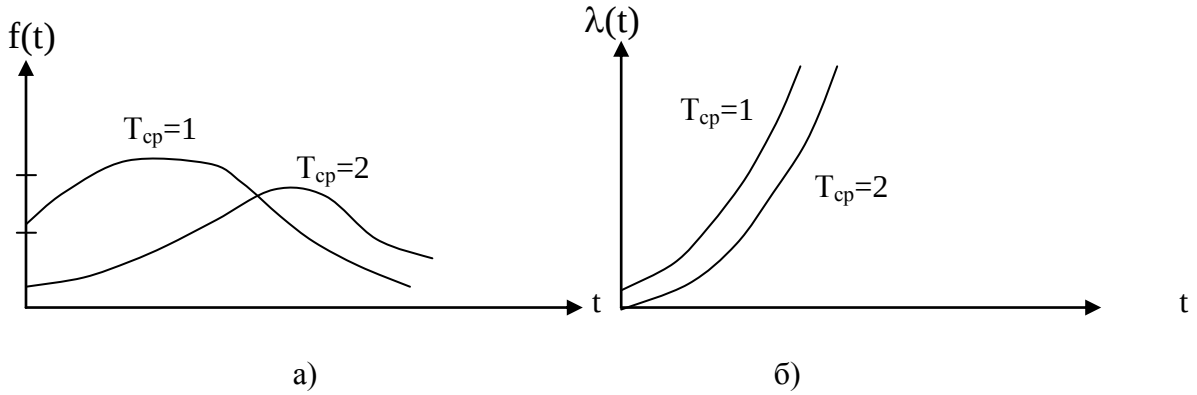


Рис. 3.3 - Щільність ймовірності напрацювання до відмови (а) та інтенсивність відмов (б) для зрізаного нормального розподілу

3.4 ***Рівномірний розподіл*** використовується при оцінюванні надійності об'єктів щодо повторюваних відмов для деякого інтервалу часу $t_2 > t > t_1$, в якому щільність розподілу відмов постійна, тобто $f(t) = C$, а за його межами дорівнює нулю.

Ймовірність безвідмовної роботи

$$P(t) = 1 - C(t - t_1). \tag{3.29}$$

3.5 ***Розподіл Пуассона*** (рис. 3.4) описує поведінку дискретних випадкових величин. Випадкова величина t розподілена за законом Пуассона, якщо ймовірність того, що вона прийме деяке значення k, виражається формулою

$$P_k(t) = \left(\frac{m^k}{k!}\right)\exp(-m), \tag{3.30}$$

де m – середня кількість відмов в інтервалі $(0, t)$.

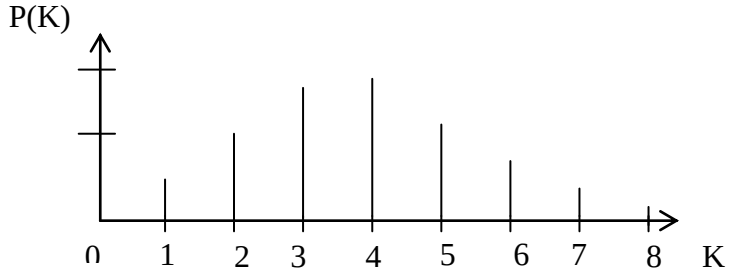


Рис. 3.4 - Розподіл Пуассона

Дисперсія випадкової величини t дорівнює її математичному сподіванню

$$D_t = m\,. \tag{3.31}$$

Інтенсивність відмов дорівнює

$$\lambda(t) = m/t\,. \tag{3.32}$$

Оскільки функція $P_k(t)$ дискретна, то в неї немає похідних. Практично всі експериментальні спостереження за безвідмовністю роботи технічного об'єкта проводяться в дискретному часі.

3.6 Визначення закону розподілу

Для розрахунку показників надійності за статистичними даними необхідно визначити закон розподілу випадкового часу напрацювання на відмову. Для цього вибірку даних N поділяють на L інтервалів за формулою:

$$L = 5\lg N\,. \tag{3.33}$$

Після цього визначають частоту попадань значень випадкової величини напрацювання на відмову в кожний інтервал

$$\tilde{f}_j = \Delta n_j / N\,, \tag{3.34}$$

де Δn_j – кількість попадань випадкової величини напрацювання до відмови в $j-$й інтервал. Довжина інтервалу $\Delta y = (y_{max} - y_{min})/N$, а ймовірність попадання випадкової величини в j-й інтервал $P_j = \tilde{f}_j$.

Побудувавши графік частоти попадань $\tilde{f}_j$ у відповідні інтервали, одержимо гістограму, яка являє собою емпіричну щільність розподілу випадкової величини у вигляді функції дискретного аргументу (рис. 3.5, а). Якщо додати площі гістограми послідовно по кожному з інтервалів, то одержимо емпіричний закон $\tilde{F}(y)$ розподілу випадкової величини y (рис. 3.5, б). Для перевірки відповідності одержаного закону одному з відомих, наприклад нормальному, використовують критерії Пірсона, Колмогорова та ін.

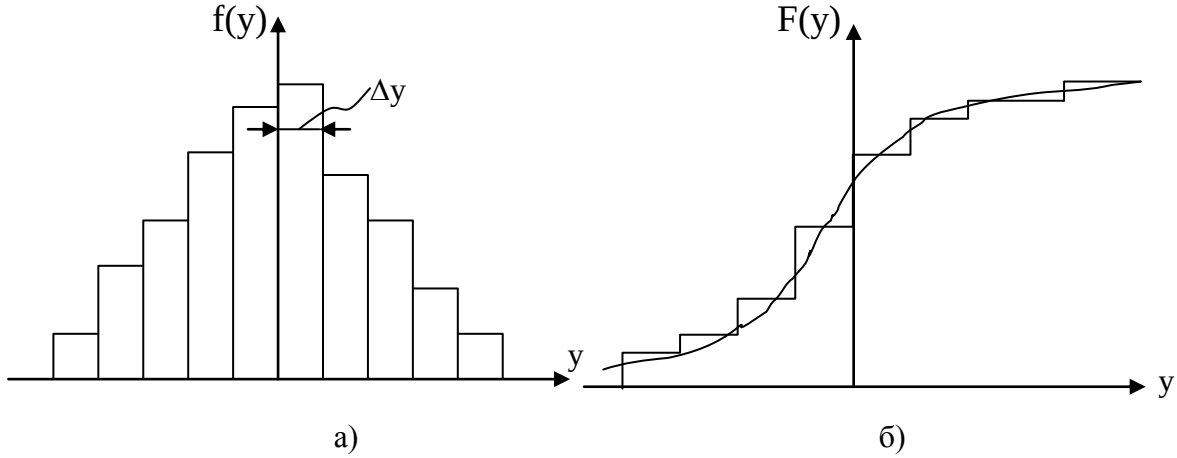


Рис. 3.5 – Емпірична щільність ймовірності випадкової величини (а) та емпірична функція розподілу (б)

3.6.1 Критерій Пірсона застосовують для вибірки від 50 до 100 результатів

Він передбачає використання χ^2-розподілу. Розподілом χ^2 (хі-квадрат) з К ступенями свободи називається розподіл суми квадратів К незалежних випадкових величин, кожна з яких відповідає центрованому і нормованому нормальному закону. Пірсон довів, що коли як відхилення гіпотетичної функції розподілу від моделі вибрано суму квадратів

$$U = \sum_{1}^{k} c_i \cdot (\tilde{f}_i - f_i)^2$$

з вагами $c_i = n / f_i$, то при великих n закон U не залежить від виду f і кількості дослідів, а залежить тільки від кількості інтервалів (інтервалів) k, а саме, наближається до розподілу χ^2. Гіпотеза про вид закону розподілу не відкидається, якщо розрахункове значення χ^2 менше табличного $\chi^2{}_0$, визначеного для заданого рівня значущості.

3.6.2 Критерій Колмогорова (для вибірки більш 100 результатів) як міру розбіжності теоретичного й експериментального розподілів використовує максимальне значення модуля різниці D між експериментальною $\tilde{F}(x)$ і теоретичною F(x) інтегральними функціями розподілу:

$$D = \max |\tilde{F}(x) - F(x)|.$$

Колмогоров довів, що якою б не була функція розподілу випадкової величини, при необмеженому зростанні числа незалежних спостережень ймовірність нерівності $D\sqrt{n} \geq \theta$ прагне до межі

$$P(\theta) = 1 - \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot (e^{-2k^2 \cdot \theta^2}).$$

В критеріях Пірсона і Колмогорова величину $1-P(\theta)=\alpha$ називають рівнем значущості. Якщо розрахованому θ або значенню $\chi^2{}_0$ відповідає рівень значущості $1-\alpha$, то можна стверджувати, що отримана розбіжність випадкова з імовірністю $1-\alpha$. Таким чином, розходження між теоретичною й експериментальною функціями розподілу обумовлені з імовірністю $1-\alpha$ не помилковою гіпотезою, а тим, що експериментальна функція розподілу побудована за обмеженою вибіркою випадкової величини. Відповідно, рівень α дорівнює ймовірності того, що розбіжність не випадкова. Це значить, що ми розглядаємо помилкову гіпотезу.

Прийнято вважати, що теоретичний розподіл не суперечить експериментальним даним, якщо $1-\alpha \geq 0{,}8$.

На практиці при застосуванні критерію Пірсона розраховують міру відхилення одержаного закону від теоретичного:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{j=1}^{1}\left(n_j - NP_j\right)^2}{NP_j}$$

де N – загальна кількість відмов;

n_j – кількість відмов в j-му інтервалі;

L – кількість інтервалів;

P_j – теоретична ймовірність попадання відмов в j – й інтервал;

При повній відповідності емпіричної та теоретичної вибіркових частот $\chi^2 = 0$.

Для оцінювання відповідності емпіричного розподілу теоретичному необхідно розрахувати фактичне значення χ^2 і порівняти його з табличним значенням при заданому рівні значимості α і відповідній кількості ступенів свободи К, яка визначається за формулою $K = 1 - r - 1$, де r – кількість параметрів теоретичного розподілу.

Наприклад, для побудови теоретичної кривої нормального розподілу достатньо два параметри – математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення, тому $r = 2$, а $K = L - 2 - 1 = L - 3$. Для побудови теоретичної кривої розподілу Пуассона необхідний один параметр λ, тому $r = 1$, а $K = L - 1 - 1 = L - 2$.